VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004г., том 16, номер 7, стр. 101-116

НОВЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ МАТРИЦАМИ

© *В.П. Гинкин, Н.М. Троянова, П.В.Новиков*

Физико-энергетический институт, Обнинск

Представлено численное исследование методов неполной факторизации для решения двумерных уравнений эллиптического типа с несимметричными матрицами. Рассмотрены различные варианты метода неполной факторизации, а также их комбинации. Выполнены параметрические исследования сходимости описанных схем, на основании которых выявлена наиболее эффективная схема HFB3.

NEW VARIANT OF INCOMPLETE FACTORIZATION METHOD FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE WITH NON SYMMETRIC MATRICES

V.P.Ginkin, N.M.Troyanova, P.V.Novikov

Institute for Physics and Power Engineering, Obninsk

The numerical research of incomplete factorization method for solving two-dimensional equations of elliptic type with non symmetric matrices is presented in the paper. The some variants of incomplete factorization method and their combinations are considered. The parametric researches of convergence of schemes are performed and most effective scheme HFB3 is found.

Введение

Метод неполной факторизации является одним из наиболее эффективных итерационных методов решения систем линейных уравнений, порождаемых конечно-разностной аппроксимацией краевых задач математической физики. Этот метод был открыт Н.И.Булеевым [1] и получил затем широкое развитие. Как показано в [2], где приведена наиболее полная библиография по этому методу, самые сильные результаты с точки зрения увеличения скорости сходимости достигнуты при использовании метода неполной факторизации в качестве предобуславливателя в методе сопряженных градиентов при решении систем линейных уравнений с симметричными матрицами коэффициентов. Однако для несимметричных матриц эти методы не годятся.

В [3] Н.И.Булеев предложил другой вариант метода неполной факторизации, обладающий свойством ускорения сходимости при появлении конвективного члена в исходном уравнении. При этом скорость сходимости была тем выше, чем больше был коэффициент при конвективном члене. В предельном случае, когда один из недиагональных коэффициентов конечно-разностного уравнения обращался в ноль для всех узлов разностной сетки, метод становился безытерационным. В [4] предложена комбинированная схема HFPP, представляющая собой чередование двух схем: схемы h-факторизации [5] и схемы параболических прогонок [4], что привело к значительному ускорению сходимости по сравнению с каждой из схем неполной факторизации в отдельности. Причем, в отличие от отдельно взятых схем, схема HFPP одинаково быстро сходится при наличии конвективных членов по обоим направлениям.

Другой подход к решению задач с несимметричными матрицами коэффициентов заключается в использовании подпространств Крылова. В этих методах на каждой итерации строится подпространство Крылова, и векторы невязки выражаются с помощью матричных многочленов от исходной матрицы, причем эти многочлены выбираются таким образом, чтобы вектор невязки был наименьшим в определенном смысле. Здесь существуют два подхода: один заключается в минимизации нормы невязки, другой – в применении метода Галеркина, что означает ортогональность вектора невязки некоторому подпространству.

Из методов такого класса наиболее известен метод бисопряженных градиентов, предложенный К.Ланцошем в [6]. Этот метод получил существенное развитие в книге Д.К. и В.Н.Фаддеевых [7], в работе Р.Флетчера [8] и многих других авторов. Идея метода Ланцоша состоит в использовании двух стартовых векторов, по которым строятся базисные векторы для подпространств Крылова при удовлетворении условия биортогональности этих векторов. Затем применяют условия Галеркина и строят экономичный и эффективный итерационный алгоритм, называемый методом бисопряженных градиентов.

К сожалению, метод бисопряженных градиентов обнаруживает в экспериментах неустойчивость и осциллирующее поведение нормы невязки. Об этом, в частности, говорится в [2]. Улучшению устойчивости метода бисопряженных градиентов посвящено много работ (см. список литературы в [9]), однако решенной эту проблему считать нельзя. Поэтому на практике для решения уравнений гидродинамики часто используют метод Зейделя, как наиболее устойчивый и простой в реализации алгоритм. Однако этот метод имеет низкую скорость сходимости.

В настоящей работе рассмотрены различные варианты комбинированных схем метода неполной факторизации, в которых одна из схем чередуется со схемой h-факторизации. Рассматриваются комбинации третьей схемы Н.И.Булеева [10] со схемой h-факторизации (схема HFB3), а также четвертой схемы из этого класса со схемой h-факторизации (схема HFB4). В этих схемах, также как и в схеме HFPP, эффект ускорения сходимости аналогичен действию многосеточных методов: одна из схем быстро сглаживает начальную ошибку, а вторая (схема h-факторизации) быстро подавляет гладкую составляющую ошибки. Показано, что схема HFB3 практически не уступает по скорости сходимости схемам HFPP и HFB4, однако проще их в реализации и требует меньше арифметических операций на одну итерацию.

1. Различные схемы метода неполной факторизации

Рассмотрим невырожденную систему линейных уравнений, порождаемую конечно-разностной аппроксимацией двумерного уравнения эллиптического типа, записанную в сеточном представлении

$$A\varphi = f, \qquad (1)$$

где

$$A\varphi = -a_{i,k}\varphi_{i-1,k} - b_{i,k}\varphi_{i,,k-1} - c_{i,k}\varphi_{i+1,k} - d_{i,k}\varphi_{i,k+1} + p_{i,k}\varphi_{i,k} \qquad i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n;$$

$$a_{i,k} \ge 0;\ b_{i,k} \ge 0;\ c_{i,k} \ge 0;\ d_{i,k} \ge 0;\ p_{i,k} \ge 0;$$

$$p_{i,k} \ge a_{i,k} + b_{i,k} + c_{i,k} + d_{i,k}.$$

Предполагается, что граничные условия уже учтены в коэффициентах этого уравнения так, что

$$a_{1,k} = c_{m,k} = 0;\quad b_{i,1} = d_{i,n} = 0.$$

Метод неполной факторизации заключается в следующем. Прибавим к обеим частям уравнения (1) вектор $B\varphi$, где оператор B выбирается таким, чтобы матрица $A+B$ представля-

лась в виде произведения двух легко обратимых матриц M и N. Тогда вместо (1) можно записать

$$M \cdot N\varphi = f + B\varphi.$$

Обозначив $N\varphi = z$, получим систему двух уравнений, которую будем решать методом последовательных приближений

$$\begin{cases} Mz = f + B\varphi^{j-1}, \\ N\varphi^{j} = z, \end{cases} \qquad j = 1,2\ldots .$$

Структура матриц M, N и B задается, а элементы этих матриц определяются из тождества

$$MN = A + B.$$

1.1. Вторая схема Н.И.Булеева. Выберем, следуя [3], матрицы M и N следующим образом:

$$Mz_{i,k} = z_{i,k} - \alpha_{i,k} z_{i-1,k} = f + B\varphi_{i,k}^{j-1},$$

$$N\varphi_{i,k} = \gamma_{i,k}\varphi_{i,k} - \beta_{i,k}\varphi_{i,k-1} - \delta_{i,k}\varphi_{i,k+1} - \xi_{i,k}\varphi_{i+1,k} = z_{i,k}$$

с неопределенными пока коэффициентами $\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}, \delta_{i,k}, \xi_{i,k}, \gamma_{i,k}$.

Исключая вспомогательную функцию $z_{i,k}$ из этой системы двух уравнений и группируя члены, получим

$$\begin{aligned} &(\gamma_{i,k} + \alpha_{i,k}\xi_{i-1,k})\varphi_{i,k} - \beta_{i,k}\varphi_{i,k-1} - \delta_{i,k}\varphi_{i,k+1} - \xi_{i,k}\varphi_{i+1,k} - \alpha_{i,k}\gamma_{i-1,k}\varphi_{i-1,k} + \\ &+ \alpha_{i,k}(\beta_{i-1,k}\varphi_{i-1,k-1} + \delta_{i-1,k}\varphi_{i-1,k+1}) = f_{i,k} + B\varphi_{i,k} = \\ &= p_{i,k}\varphi_{i,k} - b_{i,k}\varphi_{i,k-1} - d_{i,k}\varphi_{i,k+1} - c_{i,k}\varphi_{i+1,k} - a_{i,k}\varphi_{i-1,k} + B\varphi_{i,k}. \end{aligned} \tag{2}$$

Далее необходимо конкретизировать выбор оператора B. Очевидно, два члена в оператор обязательно войдут. Это члены, не лежащие на исходном шаблоне: $\alpha_{i,k}(\beta_{i-1,k}\varphi_{i-1,k-1} + \delta_{i-1,k}\varphi_{i-1,k+1})$. Однако можно потребовать, чтобы в оператор B вошли и другие члены из исходного пятиточечного шаблона и попытаться с помощью привлечения других членов добиться более высокой скорости сходимости итерационного процесса. Н.И.Булеев предложил использовать следующий вид оператора B:

$$B\varphi_{i,k} = \alpha_{i,k}[\beta_{i-1,k}\varphi_{i-1,k-1} + \delta_{i-1,k}\varphi_{i-1,k+1} - \theta(\beta_{i-1,k} + \delta_{i-1,k})\varphi_{i,k}], \tag{3}$$

где θ – итерационный параметр, $0 \le \theta < 1$.

Подставляя (3) в (2) и требуя тождественного совпадения левой и правой частей равенства (2), получим систему пяти уравнений для определения коэффициентов $\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}, \delta_{i,k}, \xi_{i,k}, \gamma_{i,k}$:

$$\gamma_{i,k} + \alpha_{i,k}\xi_{i-1,k} = p_{i,k} - \theta\alpha_{i,k}(\beta_{i-1,k} + \delta_{i-1,k});$$

$$\beta_{i,k} = b_{i,k};$$

$$\delta_{i,k} = d_{i,k};$$

$$\xi_{i,k} = c_{i,k};$$

$$\alpha_{i,k}\gamma_{i-1,k} = a_{i,k}.$$

Решив эту систему, находим рекуррентные формулы для определения $\alpha_{i,k}$ и $\gamma_{i,k}$:

$$\alpha_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{\gamma_{i-1,k}};$$

$$\gamma_{i,k} = p_{i,k} - \theta\alpha_{i,k}(\xi_{i-1,k} + \beta_{i-1,k} + \delta_{i-1,k}).$$

Оптимальное значение θ для широкого круга задач лежит в диапазоне 0,7~0,9.

Главной особенностью полученной итерационной схемы, которую обозначим B2, является то, что при равенстве $a_{i,k}$=0 выражение $B\varphi_{i,k}$ (3) становится равным нулю и схема превращается в безытерационную. С другой стороны, если коэффициенты $b_{i,k}$ и $d_{i,k}$ равны нулю, то $B\varphi_{i,k}$ также равно нулю. В силу непрерывности можно утверждать, что и в общем случае, при уменьшении коэффициента $a_{i,k}$ или коэффициентов $b_{i,k}$ и $d_{i,k}$, скорость сходимости схемы B2 будет возрастать. В свою очередь, эти коэффициенты уменьшаются при появлении конвективных членов в исходном дифференциальном уравнении. Чем больше коэффициенты при первых производных, тем лучше сходимость схемы B2.

1.2. Третья схема Н.И.Булеева. Выберем, следуя [10], матрицы M,N и B следующим образом:

$$Mz_{i,k} = z_{i,k} - \alpha_{i,k}z_{i-1,k} - \lambda_{i,k}z_{i-1,k-1} - \omega_{i,k}z_{i-1,k+1} = f + B\varphi_{i,k}^{j-1};$$

$$N\varphi_{i,k} = \gamma_{i,k}\varphi_{i,k} - \beta_{i,k}\varphi_{i,k-1} - \delta_{i,k}\varphi_{i,k+1} - \xi_{i,k}\varphi_{i+1,k} = z_{i,k};$$

$$B\varphi_{i,k} = \lambda_{i,k}\beta_{i-1,k-1}\varphi_{i-1,k-2} + \omega_{i,k}\delta_{i-1,k+1}\varphi_{i-1,k+2}.$$

Формулы для вычисления неопределенных коэффициентов $\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}, \delta_{i,k}, \xi_{i,k}, \lambda_{i,k}, \omega_{i,k}, \gamma_{i,k}$ имеют вид

$$\alpha_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{\gamma_{i-1,k} - B\delta_{i-1,k-1} - D_1\beta_{i-1,k+1}},$$

$$\lambda_{i,k} = \alpha_{i,k}B_1,$$

$$\omega_{i,k} = \alpha_{i,k}D_1,$$

$$\beta_{i,k} = b_{i,k} + \lambda_{i,k}\xi_{i-1,k-1},$$

$$\delta_{i,k} = d_{i,k} + \omega_{i,k}\xi_{i-1,k+1},$$

$$\xi_{i,k} = c_{i,k},$$

$$\gamma_{i,k} = p_{i,k} - \alpha_{i,k}\xi_{i-1,k},$$

где введены обозначения $B_1 = \dfrac{\beta_{i-1,k}}{\gamma_{i-1,k-1}}$, $D_1 = \dfrac{\delta_{i-1,k}}{\gamma_{i-1,k+1}}$.

Эту схему будем обозначать B3. Основным ее отличием от схемы B2 является большая удаленность от диагонали итерационных членов в выражении для оператора B и, как следст-

вие, более высокая скорость сходимости. Здесь и далее в операторе B сохраняется минимально возможное количество членов.

1.3. Четвертая схема. Четвертая схема строится по аналогии со второй и третьей схемами. Все отличия в этих схемах обусловлены различным количеством членов в операторе M на линии с номером i–1. Во второй схеме имеется только один член на этой линии: $-\alpha_{i,k}z_{i-1,k}$. В третьей схеме добавлены еще два члена: $-\lambda_{i,k}z_{i-1,k-1}-\omega_{i,k}z_{i-1,k+1}$. В четвертой схеме добавляются еще два члена: $-\mu_{i,k}z_{i-1,k-2}-\upsilon_{i,k}z_{i-1,k+2}$. В результате получим следующую итерационную схему:

$$Mz_{i,k} = z_{i,k} - \alpha_{i,k}z_{i-1,k} - \lambda_{i,k}z_{i-1,k-1} - \omega_{i,k}z_{i-1,k+1} - \mu_{i,k}z_{i-1,k-2} - \upsilon_{i,k}z_{i-1,k+2} = f + B\varphi_{i,k}^{j-1},$$

$$N\varphi_{i,k} = \gamma_{i,k}\varphi_{i,k} - \beta_{i,k}\varphi_{i,k-1} - \delta_{i,k}\varphi_{i,k+1} - \xi_{i,k}\varphi_{i+1,k} = z_{i,k},$$

$$B\varphi_{i,k} = \mu_{i,k}(\beta_{i-1,k-2}\varphi_{i-1,k-3} + \xi_{i-1,k-2}\varphi_{i,k-2}) + \upsilon_{i,k}(\delta_{i-1,k+2}\varphi_{i-1,k+3} + \xi_{i-1,k+2}\varphi_{i,k+2}).$$

Формулы для вычисления коэффициентов имеют вид

$$\alpha_{i,k} = \frac{\alpha_{i,k}}{\gamma_{i-1,k} - B\delta_{i-1,k-1} - D_1\beta_{i-1,k+1}},$$

$$\lambda_{i,k} = \alpha_{i,k}B_1,$$

$$\omega_{i,k} = \alpha_{i,k}D_1,$$

$$\mu_{i,k} = \lambda_{i,k}B_2,$$

$$\upsilon_{i,k} = \omega_{i,k}D_2,$$

$$\beta_{i,k} = b_{i,k} + \lambda_{i,k}\xi_{i-1,k-1},$$

$$\delta_{i,k} = d_{i,k} + \omega_{i,k}\xi_{i-1,k+1},$$

$$\xi_{i,k} = c_{i,k},$$

$$\gamma_{i,k} = p_{i,k} - \alpha_{i,k}\xi_{i-1,k},$$

где введены обозначения

$$B_2 = \frac{\beta_{i-1,k+2}}{\gamma_{i-1,k+2}};\quad D_2 = \frac{\delta_{i-1,k-2}}{\gamma_{i-1,k-2}};\quad B_1 = \frac{\beta_{i-1,k}}{\gamma_{i-1,k-1} - D_2\beta_{i-1,k-1}};\quad D_1 = \frac{\delta_{i-1,k}}{\gamma_{i-1,k+1} - B_2\delta_{i-1,k+1}}.$$

Построенную схему обозначим B4. В отличие от схем B2 и B3 в схеме B4 оператор B содержит не два, а четыре члена, что приводит к возрастанию числа арифметических операций на каждую итерацию по сравнению со схемой B3.

1.4. Схема *h*-факторизации. В схеме h-факторизации [5] операторы M и N имеют такой же вид, как и в схеме B2, но оператор B содержит дополнительные члены во всех узлах пятиточечного шаблона и строится из требования обращения в ноль первых пяти членов разложения $B\varphi_{i,k}$ в ряд Тейлора в центральном узле пятиточечного шаблона. В результате получим выражение для оператора B и формулы для вычисления коэффициентов

$$B\varphi_{i,k} = \alpha_{i,k}[\beta_{i-1,k}(\varphi_{i-1,k-1} + \varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k} - \varphi_{i,k-1}) + \delta_{i-1,k}(\varphi_{i-1,k+1} + \varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k} - \varphi_{i,k+1})],$$

$$\alpha_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{\gamma_{i-1,k} - \beta_{i-1,k} - \delta_{i-1,k}},$$

$$\gamma_{i,k} = p_{i,k} - \alpha_{i,k}(\xi_{i-1,k} - \beta_{i-1,k} - \delta_{i-1,k}),$$

$$\beta_{i,k} = b_{i,k} + \alpha_{i,k}\beta_{i-1,k},$$

$$\delta_{i,k} = d_{i,k} + \alpha_{i,k}\delta_{i-1,k},$$

$$\xi_{i,k} = c_{i,k}.$$

Отличительной чертой схемы h-факторизации, которую будем далее обозначать как HF, является то, что выражение $B\varphi_{i,k}$ обращается в ноль, если функция $\varphi_{i,k}$ (т.е. начальная ошибка) не зависит хотя бы от одного индекса i или k. В этих случаях схема HF превращается в безытерационную. Ни одна из всех приведенных выше схем неполной факторизации не обладает этим свойством. Благодаря этому свойству асимптотическая скорость сходимости схемы HF имеет порядок $O(n)$, где n – число узлов по одному из направлений. Все остальные варианты метода неполной факторизации имеют асимптотическую скорость сходимости порядка $O(n^2)$, что существенно хуже.

1.5. Схема параболических прогонок. В схеме параболических прогонок (обозначаемой PP) исходное уравнение умножается на оператор R, определяемый выражением

$$Rf_{i,k} = f_{i,k} - \mu_{i,k}f_{i,k-1} - \eta_{i,k}f_{i,k+1}.$$

К полученному уравнению применяется метод неполной факторизации

$$Mz_{i,k} = Rf_{i,k} + B\varphi_{i,k}^{j-1};$$

$$N\varphi_{i,k} = z_{i,k},$$

где операторы M и N имеют вид сеточных аналогов уравнений параболического типа, что и послужило поводом к такому названию метода:

$$Mz_{i,k} = z_{i,k} - \lambda_{i,k}z_{i,k-1} - \omega_{i,k}z_{i,k+1} - \alpha_{i.k}z_{i-1,k},;$$

$$N\varphi_{i,k} = \gamma_{i,k}\varphi_{i,k} - \beta_{i,k}\varphi_{i,k-1} - \delta_{i,k}\varphi_{i,k+1} - \xi_{i,k}\varphi_{i+1,k}.$$

Исключая функцию $z_{i,k}$ из этих двух уравнений, получим одиннадцатиточечное выражение, структурно совпадающее с выражением $RA\varphi_{i,k}$. Приравнивая выражения $MN\varphi_{i,k}$ и $RA\varphi_{i,k}$, получим переопределенную систему из одиннадцати уравнений относительно девяти неизвестных коэффициентов. Отбросим из этой системы два уравнения, которые и образуют оператор B. Это можно сделать различными способами. Следуя [4], оставим в операторе B два члена, наиболее далеко отстоящие от диагонали. Решая оставшуюся систему девяти уравнений относительно девяти неизвестных, получим формулы для вычисления неопределенных коэффициентов и определим $B\varphi_{i,k}$:

$$\alpha_{i,k} = \frac{\alpha_{i,k}}{\gamma_{i-1,k}},$$

$$\mu_{i,k} = \lambda_{i,k} = \frac{\alpha_{i,k}\beta_{i-1,k}}{a_{i,k-1}},$$

$$\eta_{i,k} = \omega_{i,k} = \frac{\alpha_{i,k}\delta_{i-1,k}}{a_{i,k+1}},$$

$$\xi_{i,k} = c_{i,k} \,,$$

$$\gamma_{i,k} = p_{i,k} - h_{i,k},$$

$$\beta_{i,k} = b_{i,k} + \lambda_{i,k} h_{i,k-1},$$

$$\delta_{i,k} = d_{i,k} + \omega_{i,k} h_{i,k+1},$$

$$B\varphi_{i,k} = \lambda_{i,k}\lambda_{i,k-1} h_{i,k-2}\varphi_{i,k-2} + \omega_{i,k}\omega_{i,k+1} h_{i,k+2}\varphi_{i,k+2},$$

где

$$h_{i,k} = \frac{\alpha_{i,k} c_{i-1,k}}{1 - \lambda_{i,k}\omega_{i,k-1} - \omega_{i,k}\lambda_{i,k+1}}.$$

2. Комбинированные схемы

Как было показано в [4], чередование схем HF и PP приводит к значительному ускорению сходимости по сравнению с каждой из этих двух схем в отдельности. Такая комбинированная схема получила название HFPP. Эта схема оказалась весьма эффективной для решения задач с несимметричными матрицами A. Высокая скорость сходимости схемы HFPP обусловлена тем, что схема HF быстро уничтожает гладкие компоненты ошибки, а схема PP – все остальные. Комбинация схемы B2 со схемой HF не приводит к значительному ускорению сходимости. Комбинации других схем неполной факторизации со схемой HF не использовались. В то же время видно, что операторы B в схемах PP и B3 имеют близкую структуру. В обеих схемах оператор B – двухточечный, и входящие в него члены одинаково далеко отстоят от центрального узла шаблона в направлении изменения индекса k. Поэтому следует ожидать, что схемы PP и B3 должны обладать примерно одинаковой скоростью сходимости. Можно также ожидать, что чередование схем HF и B3 также приведет к значительному ускорению сходимости по сравнению с каждой из этих двух схем в отдельности. Возможно, что комбинация схем HF и B4 также приведет к дальнейшему росту скорости сходимости итераций. Выяснению этих вопросов посвящены следующие разделы отчета.

3. Сравнение различных схем

Сравнение описанных выше схем будем проводить численно на решении задачи Дирихле и задачи Неймана-Дирихле с одной закрепленной точкой. Сначала будет решаться уравнение Пуассона с симметричной матрицей A. Затем в это уравнение будут введены конвективные члены по каждому из направлений с коэффициентами, изменяемыми во всем допустимом диапазоне, при котором матрица A остается матрицей положительного типа.

Будут решаться однородная и неоднородная задачи. В случае неоднородной задачи критерием сравнения различных схем является число итераций, затраченной на решение задачи с заданной точностью. Начальное приближение выбиралось равное нулю.

В случае решения однородной задачи искомое решение равно нулю, а начальное приближение выбирается таким, чтобы в нем присутствовали как гладкие, так и негладкие компоненты ошибки. Критерием сравнения различных схем является число итераций, а также

спектральный радиус оператора перехода итерационного процесса, который вычислялся по формуле $\rho = \lim_{j\to\infty}\left(\max(\varphi_{i,k})^j / \max(\varphi_{i,k})^{j_0}\right)^{\frac{1}{(j-j_0)}}$, где j_0 выбиралось равным 10.

3.1. Неоднородная задача Дирихле. Рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=f\,,\ -1<x,y<1;\ \varphi\big|_{x=1}=\varphi\big|_{x=-1}=\varphi\big|_{y=1}=\varphi\big|_{y=-1}=0\,.$$

Выберем f таким образом, чтобы решение задачи имело вид $\varphi=(1+\cos\pi x)(1+\cos\pi y)$.

Построим в области x,y∈[−1,1] сетку с одинаковым шагом по каждому из направлений так, чтобы крайние узлы отстояли на один шаг от границы области. Расчетные узлы выберем в точках пересечения координатных линий сетки. Пронумеруем узлы сетки по оси *X:* $i=1,...,n$, и по оси *Y:* $k=1,...,n$. Шаг сетки при этом равен $h=2/(n+1)$. Перейдем к разностному аналогу задачи, имеющему вид (1), где все ненулевые значения коэффициентов $a_{i,k},b_{i,k},c_{i,k},d_{i,k}$ равны единице, $p_{i,k}=4$, а $f_{i,k}$ определяется выражением

$$f_{i,k}=\pi^2h^2[(1+\cos\pi x_i)\cos\pi y_k+(1+\cos\pi y_k)\cos\pi x_i],$$

где $x_i=ih-1;\quad y_k=kh-1$..

Итерации заканчиваются при выполнении условия

$$\max_{i,k}\left|\frac{\varphi^j_{i,k}-\varphi^{j-1}_{i,k}}{\varphi^j_{i,k}}\right|\le\varepsilon.$$

В табл.1 приведены для сравнения данные из [11] для задачи №1 при $\varepsilon=10^{-4}$ для следующих методов:
МЗ – метод Зейделя;
ПВР – метод последовательной верхней релаксации;
БВР – метод блочной верхней релаксации;
ПНС – стационарный метод переменных направлений;
ПТ – стационарный попеременно-треугольный метод;
ДПТ – двухпараметрический попеременно-треугольный метод;
ПТЧУ – попеременно-треугольный метод с чебышевским ускорением;
ПТМН – попеременно-треугольный метод с минимальными невязками.

Количество итераций для задачи №1 при $\varepsilon=10^{-4}$. Таблица 1.

n	20	30	50
МЗ	319	644	1531
ПВР	83	147	327
БВР	54	90	190
ПНС	27	39	60
ПТ	46	65	101
ДПТ	28	42	61
ПТЧУ	20	31	38
ПТМН	15	21	25
HFPP	9	13	20

Для каждого итерационного алгоритма приведенные значения *J* соответствуют величинам итерационных параметров, близким к их оптимальным экспериментальным значениям в соответствующей задаче. Из табл.1 видно, что при $n\le50$ все эти методы уступают по скоро-

сти сходимости схеме HFPP.

На рис.1 приведены зависимости количества итераций от числа узлов по одному направлению n для решения сформулированной выше задачи Дирихле по схемам HFPP, HFB3 и HF. Из них видно, что схемы HFPP и HFB3 имеют примерно одинаковую скорость сходимости и значительно превосходят по скорости сходимости схему HF. Следует отметить, что схема HFB3 проще в реализации, чем схема HFPP, так как при обращении оператора M в схеме PP необходимо выполнять одномерные прогонки, а в схеме B3 - нет.

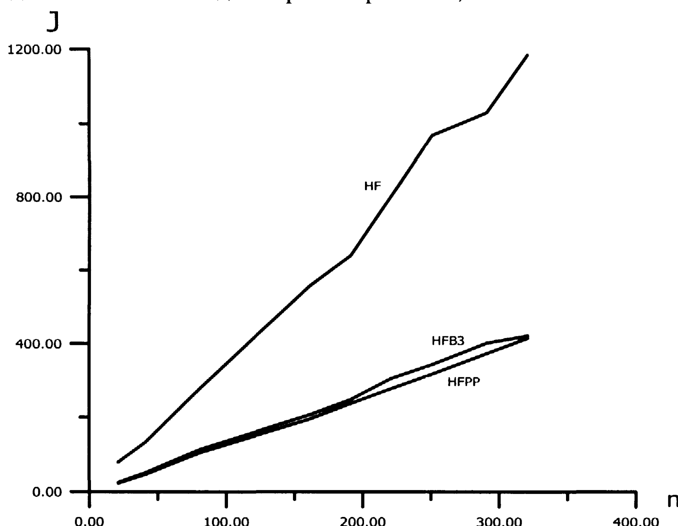


Рис.1. Неоднородная задача Дирихле. Зависимость количества итераций J от числа узлов сетки n по одному направлению.

3.2. Однородная задача Неймана-Дирихле. Рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \qquad -1<x,\ y<1,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{x=-1}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=1}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=-1}=0, \quad \varphi|_{x=1,y=1}=0.$$

Решение этой задачи равно нулю. Построим сетку, разбив область на одинаковые ячейки семейством линий, параллельных координатным осям. Расчетные узлы выберем в центрах ячеек. Тогда шаг сетки равен $h=2/n$, где n – число узлов по одному из направлений, а крайние узлы отстоят на полшага границы области. Перейдем к разностному аналогу задачи, имеющему вид (1), где все ненулевые коэффициенты $a_{i,k}, b_{i,k}, c_{i,k}, d_{i,k}$ равны единице, а коэффициент $p_{i,k}$ равен $p_{i,k}=a_{i,k}+b_{i,k}+c_{i,k}+d_{i,k}$ для всех значений $i=1,...,n$, $k=1,...,n$, кроме одной точки $i=n$, $k=n$, в которой $p_{i,k}=6$.

Итерации заканчиваются при выполнении условия $\max\limits_{i,k}\left|\frac{\varphi^j_{i,k}}{\varphi^0_{i,k}}\right|\le\varepsilon$.

На рис.2 приведены зависимости количества итераций от числа узлов n для трех схем: HFB4, HFB3 и HFPP. Видно, что все три схемы обладают примерно одинаковой скоростью сходимости. Наименьшая вычислительная работа на одну итерацию приходится при этом в схеме HFB3. Значит, ей и следует отдать предпочтение.

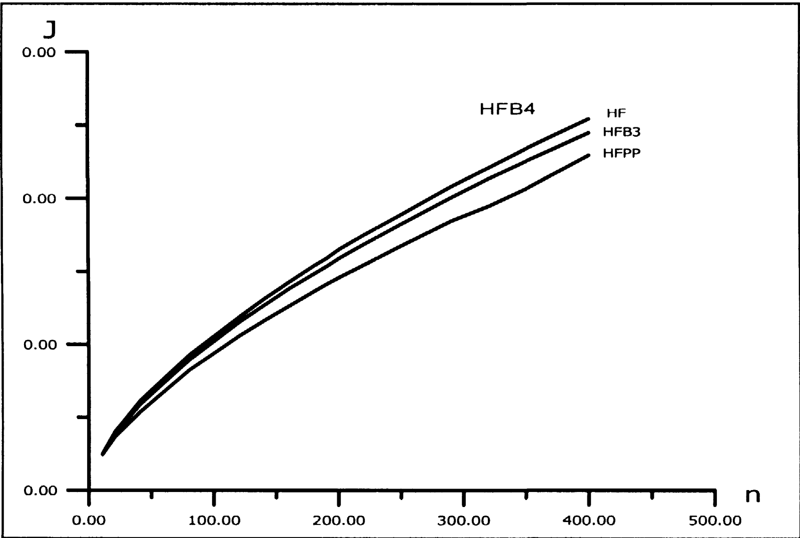


Рис.2. Однородная задача Неймана-Ди рихле. Зависимость числа итераций J от количества узлов сетки n по одному направлению.

В табл,2 приведены значения спектрального радиуса оператора перехода ρ в зависимости от числа узлов n для пяти схем: В4, HF, HFPP, HFB3 и HFB4. Наименьшее значение ρ соответствует схеме HFB4, далее следует схема HFB3. Отличия в значениях ρ для последних трех схем в табл.2 незначительны.

Таблица 2.
Однородная задача Неймана-Дирихле. Спектральный радиус оператора перехода.

n	B4	HF	HFPP	HFB3	HFB4
11	0,975	0,88	0,77	0,776	0,75
21	0,995	0,946	0,849	0,845	0,83
41	0,998	0,947	0,9	0,897	0,88
81	0,999	0,987	0,943	0,932	0,93
121	0,999	0,992	0,949	0,947	0,94
141		0,993	0,954	0,952	0,948
161		0,9937	0,958	0,956	0,952
181		0,994	0,96	0,959	0,95
191		0,9947	0,962	0,961	0,958
201		0,995	0,963	0,962	0,959
221		0,9954	0,966	0,965	0,961
251		0,996	0,968	0,967	0,964
291			0,971	0,970	0,967
321			0,973	0,972	0,969
351			0,974	0,973	0,971
401			0,976	0,975	0,974

3.3. Несимметричные задачи. Рассмотрим задачу Дирихле следующего вида:

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+K_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=f,\quad -1<x,y<1;\quad \varphi\big|_{x=1}=\varphi\big|_{x=-1}=\varphi\big|_{y=1}=\varphi\big|_{y=-1}=0.$$

Построим сетку так же, как в п.3.1 и перейдем к разностному аналогу, заменив производные $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ центральными разностями. Ненулевые значения коэффициентов и правая часть уравнения (1) вычисляются по формулам:

$$a_{i,k} = (1-\frac{K_x h}{2}),\quad c_{i,k} = (1+\frac{K_x h}{2}),\quad b_{i,k} = (1-\frac{K_y h}{2}),\quad d_{i,k} = (1+\frac{K_y h}{2}),\quad p_{i,k} = 4,$$

$$f_{i,k} = \pi^2 h^2\left[(1+\cos\pi x_i)\cos\pi y_k + (1+\cos\pi y_k)\cos\pi x_i\right] +$$
$$+\pi h^2 K_x \sin\pi x_i (1+\cos\pi y_k) + \pi h^2 K_y \sin\pi y_k (1+\cos\pi x_i);$$

$$-(n+1) \le K_x \le (n+1);\quad -(n+1) \le K_y \le (n+1);\quad h=2/(n+1).$$

В табл.3-10 приведены количества итераций для решения этой задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ при различных значениях K_x, K_y и n по схемам HF, B3, HFPP и HFB3.

Число итераций для схемы HF. K_y=0, ε=10^{-5}. Таблица 3.

K_x	n=51	n=101	n=201
n+1	82	116	119
3(n+1)/4	85	180	179
(n+1)/2	99	175	193
(n+1)/4	116	196	294
0	118	248	391
-(n+1)/4	10	10	10
-(n+1)/2	7	7	7
-3(n+1)/4	5	5	5
-(n+1)	2	2	2

Число итераций для схемы HF. K_x=0, ε=10^{-5}. Таблица 4.

K_y	n=51	n=101	n=201
n+1	1128	4502	
3(n+1)/4	933	3826	
(n+1)/2	583	2333	
(n+1)/4	293	1070	
0	118	248	391
-(n+1)/4	293	1070	
-(n+1)/2	583	2332	
-3(n+1)/4	933	3826	
-(n+1)	1128	4502	

Число итераций для схемы B3. K_y=0, ε=10^{-5}. Таблица 5.

K_x	n=51	n=101	n=201
n+1	24	37	59
3(n+1)/4	29	46	74
(n+1)/2	40	63	103
(n+1)/4	84	125	201
0	408	1477	
-(n+1)/4	74	105	158
-(n+1)/2	28	39	57
-3(n+1)/4	15	20	27
-(n+1)	2	2	2

Число итераций для схемы B3. K_x=0, ε=10^{-5}. Таблица 6.

K_y	n=51	n=101	n=201
n+1	21	34	58
3(n+1)/4	25	40	66
(n+1)/2	36	56	91
(n+1)/4	81	119	187
0	408	1477	
-(n+1)/4	81	119	187
-(n+1)/2	36	56	91
-3(n+1)/4	25	40	66
-(n+1)	21	34	58

Число итераций для схемы HFPP. K_y=0, ε=10^{-5}. Таблица 7.

K_x	n=51	n=101	n=201
n+1	4	4	4
3(n+1)/4	16	22	28
(n+1)/2	23	31	44
(n+1)/4	37	51	73
0	49	90	168
-(n+1)/4	13	12	11
-(n+1)/2	9	9	9
-3(n+1)/4	7	7	7
-(n+1)	3	3	3

Число итераций для схемы HFPP. K_x=0, ε=10^{-5}. Таблица 8.

K_y	n=51	n=101	n=201
n+1	30	44	72
3(n+1)/4	32	52	84
(n+1)/2	42	65	108
(n+1)/4	63	108	178
0	49	90	168
-(n+1)/4	63	108	178
-(n+1)/2	42	65	108
-3(n+1)/4	32	52	84
-(n+1)	30	44	72

Число итераций для схемы HFB3. K_y =0, ε=10^{-5}. Таблица 9.

K_x	n=51	n=101	n=201
n+1	24	35	49
3(n+1)/4	28	40	60
(n+1)/2	30	49	72
(n+1)/4	42	62	90
0	52	102	192
-(n+1)/4	12	12	10
-(n+1)/2	8	8	8
-3(n+1)/4	6	6	6
-(n+1)	2	2	2

Число итераций для схемы HFB3. K_x =0, $\varepsilon=10^{-5}$. Таблица 10.

K_y	n=51	n=101	n=201
n+1	37	59	98
3(n+1)/4	41	66	108
(n+1)/2	52	84	136
(n+1)/4	68	130	228
0	52	102	192
-(n+1)/4	68	130	228
-(n+1)/2	52	84	136
-3(n+1)/4	41	66	108
-(n+1)	37	59	98

На рис.3-5 приведены зависимости количества итераций по этим схемам от K_x при K_y=0 для n=51, 101 и 201. Из этих данных видно, что все упомянутые схемы сходятся тем быстрее, чем больше отличается K_x от нуля. Наилучшей сходимостью обладает схема HFPP, однако схема HFB3 уступает ей незначительно. При значении K_x=0 схемы HF и B3 сходятся значительно хуже, чем схемы HFPP и HFB3, причем наихудшей скоростью сходимости при K_x=0 обладает схема B3.

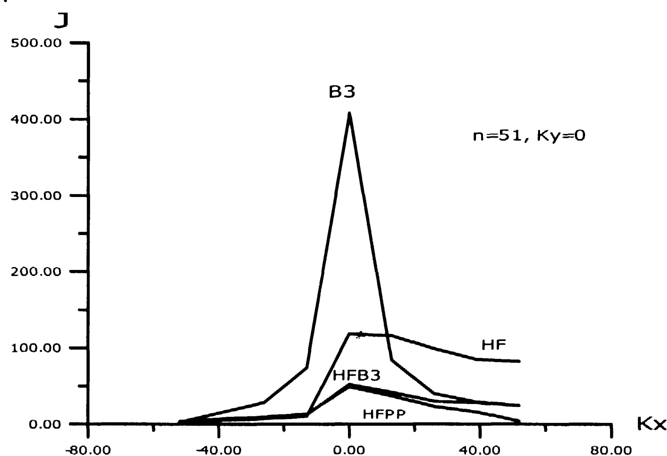


Рис.3. Зависимость числа итераций J от K_x при n=51.

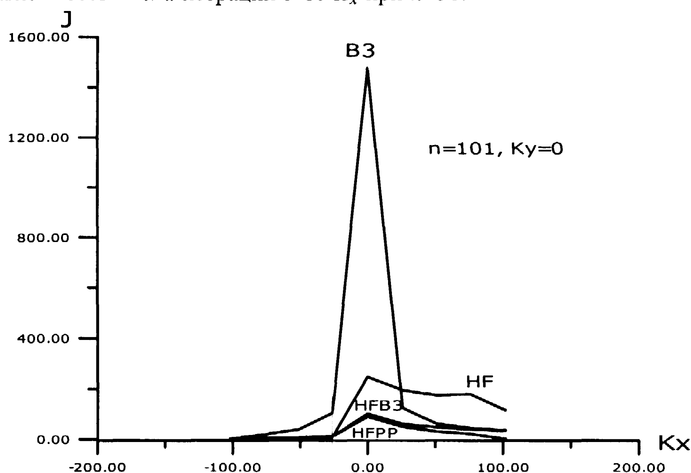


Рис.4. Зависимость числа итераций J от K_x при n=101.

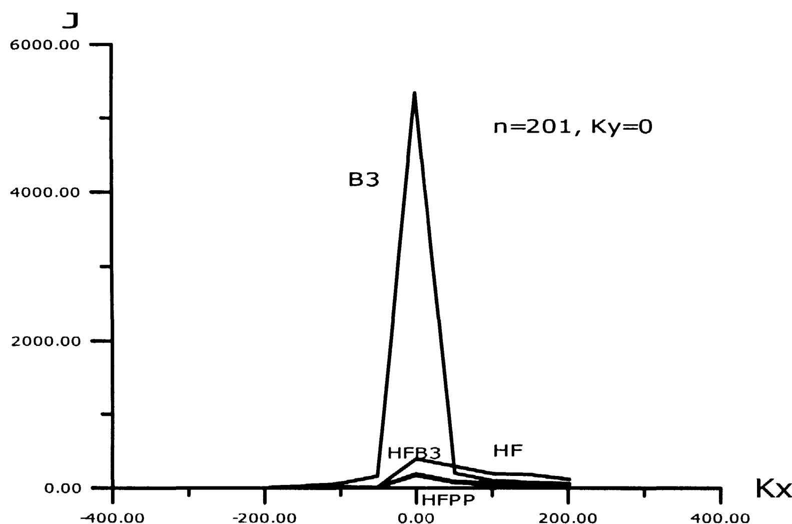


Рис.5. Зависимость числа итераций J от K_x при n=201.

На рисунках 6-8 приведены зависимости количества итераций от K_y при K_x=0. Эти рисунки особенно ярко демонстрируют эффект от использования комбинации двух схем. При значениях K_y, близких к нулю, очень плохо сходится схема B3, а схема HF сходится довольно хорошо. Однако при возрастании значения K_y по абсолютной величине скорость сходимости схемы B3 резко возрастает, а скорость сходимости схемы HF, наоборот, резко падает. Скорости сходимости комбинированных схем HFPP и HFB3 практически не отличаются друг от друга и слабо зависят от значения K_y.

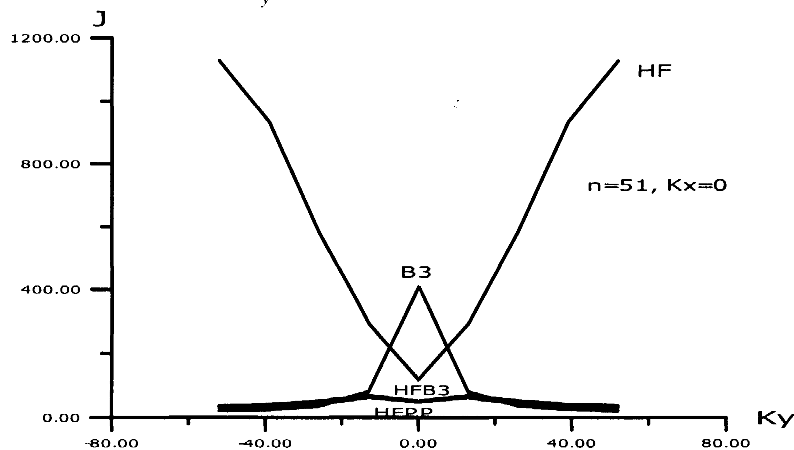


Рис.6. Зависимость числа итераций J от K_y при n=51

Заключение

В работе исследованы скорости сходимости некоторых схем неполной факторизации, в которых второй из сомножителей факторизованного уравнения определен на четырехточечном шаблоне, а первый из сомножителей имеет различную структуру для различных схем. Эти схемы предназначены для решения двумерных задач и обладают свойством значительного ускорения сходимости при возрастании по абсолютной величине коэффициентов при конвективных членах, т.е. при решении задач с несимметричными матрицами коэффициентов. Схемы B2 и B3 предложены Н.И.Булеевым, схема B4 получена впервые в данной работе по ана-

логии с построением схем B2 и B3. Решение тестовых задач Дирихле и Неймана-Дирихле показало, что для решения задач с симметричными матрицами коэффициентов, т.е. при отсутствии конвективных членов в исходном уравнении, скорости сходимости схем B2, B3, и B4 очень низки. Значительно быстрее в этих случаях сходится схема HF. Однако эта схема крайне плохо сходится при возрастании по абсолютной величине коэффициента K_y при конвективном члене по оси Y. Комбинированные схемы HFPP, HFB3 и HFB4 значительно превосходят по скорости сходимости все остальные схемы во всем диапазоне изменения значений коэффициентов K_x и K_y при конвективных членах. Схема HFB4 сходится лучше, чем схемы HFPP и HFB3. Однако это улучшение незначительно и не компенсирует увеличение вычислительной работы на одну итерацию по схеме HFB4 по сравнению со схемой HFB3. По этой же причине из двух схем HFB3 и HFPP более эффективной является схема HFB3.

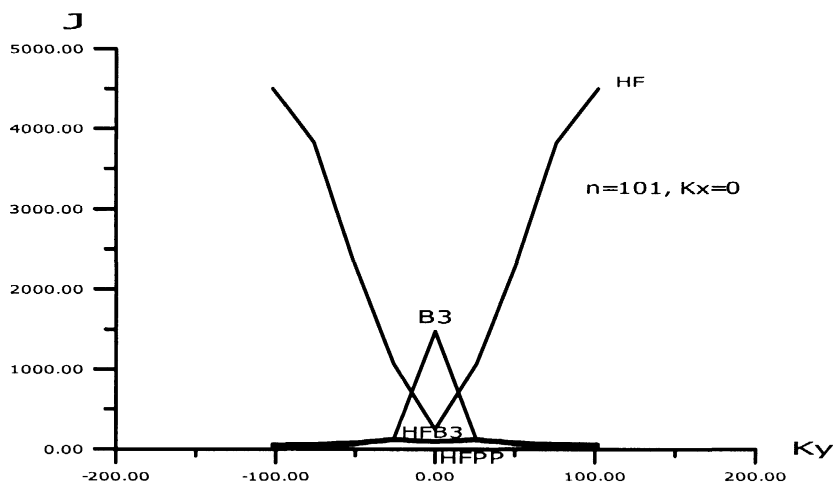


Рис.7. Зависимость числа итераций J от K_y при n=101.

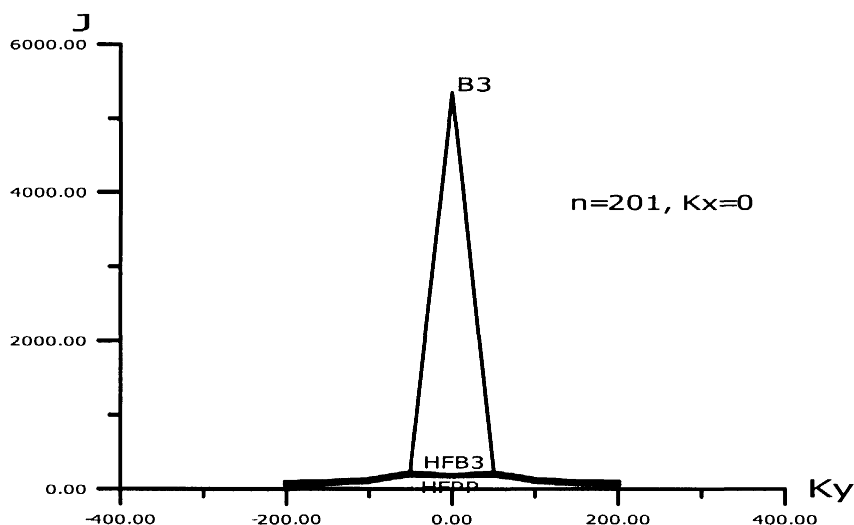


Рис.8. Зависимость числа итераций J от K_y при n=201.

Таким образом, можно сделать вывод, что предложенная в данной работе комбинированная схема HFB3 является наиболее эффективной из всех рассмотренных выше схем непол-

ной факторизации, особенно при решении плохо обусловленных задач типа задачи Неймана-Дирихле и задач с несимметричными матрицами коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Н.И.Булеев.* Численный метод решения двумерных уравнений диффузии // Атомная энергия, 1959, т.6, №3, с.338-340.
2. *В.П.Ильин.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М.: Наука, 1995, 288 с.
3. *Н.И.Булеев.* Новый вариант метода неполной факторизации для решения двумерных разностных уравнений диффузии // Численные методы механики сплошной среды, 1978, т.9, №1, с.5-19.
4. *В.П.Гинкин.* Метод параболических прогонок для решения двумерных уравнений эллиптического типа. – Обнинск: 1981, препринт ФЭИ-1153.
5. *В.П.Гинкин.* Метод h-факторизации для решения двумерных уравнений эллиптического типа // Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977, с.123-132.
6. *C.Lanczos.* Solution of systems of linear equations by minimized iterations // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1952, v.49, №.1, p.33-53.
7. *Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963.
8. *R.Fletcher.* Conjugate gradient methods for indefinite systems // Lecture Notes in Mathematics, 1976, v.506, p.73-89.
9. *R.W.Freund, G.H.Golub, N.M.Nachtigal.* Iterative solution of linear systems: Manuscript NA-91-05. Comp.Sc.Dep; Stanford Un., 1991.
10. *Н.И.Булеев.* Методы неполной факторизации для решения двумерных уравнений эллиптического типа // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов, 1980, вып.3 (13), с.3-14.
11. *В.П.Ильин.* Численные методы решения задач электрооптики. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1974, 202 с.

Поступила в редакцию 10.06.03